Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$.

1) Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$: $\sqrt{1+x^2} \times f'(x) = f(x)$.
2) En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$: $(1+x^2)f''(x) + x\,f'(x) - f(x) = 0$.

Exercice 2 :

(i) *montrer que la dérivée d'une fonction paire est impaire*
(ii) *montrer que la dérivée d'une fonction impaire est paire*
(iii) *montrer que la dérivée d'une fonction T-périodique est T-périodique*

Exercice 1 :

Enoncé :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$.

1) Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$: $\sqrt{1+x^2} \times f'(x) = f(x)$.
2) En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$: $(1+x^2)f''(x) + x f'(x) - f(x) = 0$.

Résolution :

Réécriture :
$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = u(x) + v(w(x))$
En posant :
$\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = x$ $\qquad \forall X \in \mathbb{R}^+, v(X) = \sqrt{X}$ $\qquad \forall x \in \mathbb{R}, w(x) = 1 + x^2$

Dérivabilité :
u et w sont dérivable sur $\mathbb{R}$.
v est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.
Or, $\forall x \in \mathbb{R}, w(x) = 1 + x^2 > 0$. D'où $v(w(x))$ dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition.
Puis par somme de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$, f est finalement dérivable sur $\mathbb{R}$.

Calcul de dérivé :
$\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = 1 \quad \forall X \in \mathbb{R}_*^+, v'(X) = \frac{1}{2\sqrt{X}} \quad \forall x \in \mathbb{R}, w'(x) = 2x$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = u'(x) + w'(x)v'\big(w(x)\big) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

1) On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{1+x^2}f'(x) = \sqrt{1+x^2}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \sqrt{1+x^2} + x = f(x)$$

2)

On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 + \frac{u(x)}{v(w(x))}$. On prouve aisément que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ (par quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à dénominateur non nul pour tout réel).
On dérive sur $\mathbb{R}$:

$$f''(x) = \frac{u'(x)v\big(w(x)\big) - u(x)w'(x)v'\big(w(x)\big)}{\Big(v\big(w(x)\big)\Big)^2} = \frac{\sqrt{1+x^2} - x\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}(1+x^2)f''(x) + xf'(x) - f(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + x\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \left(\sqrt{1+x^2} + x\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + x + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} - \sqrt{1+x^2} - x\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}\\ &= 0\end{aligned}$$

Exercice 2 :

<u>Enoncé</u> :

(i) *montrer que la dérivée d'une fonction paire est impaire*
(ii) *montrer que la dérivée d'une fonction impaire est paire*
(iii) *montrer que la dérivée d'une fonction T-périodique est T-périodique*

<u>Résolution</u> :

(i) Soit f une fonction paire définie dérivable sur un intervalle I.
Par définition : $\forall x \in I, f(x) = f(-x)$.

$$\begin{aligned}
f'(-x_0) &= \lim_{x\to -x_0} \frac{f(x) - f(-x_0)}{x - (-x_0)} && \text{par définition du nombre dérivé} \\
&= \lim_{x\to -x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x + x_0} && \text{par parité de } f \text{ (au numérateur)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(-x) - f(x_0)}{-x + x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{-(x - x_0)} && \text{par parité de } f \text{ (au numérateur)} \\
&= -\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= -f'(x_0)
\end{aligned}$$

Conclusion : f' est impaire.

(ii) *Bis repetia*. Soit f une fonction impaire définie dérivable sur un intervalle I. Par définition, on a :
$\forall x \in I, f(x) = f(-x)$.

$$\begin{aligned}
f'(-x_0) &= \lim_{x\to -x_0} \frac{f(x) - f(-x_0)}{x - (-x_0)} && \text{par définition du nombre dérivé} \\
&= \lim_{x\to -x_0} \frac{-f(-x) + f(x_0)}{x + x_0} && \text{par imparité de } f \text{ (au numérateur)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{-f(x) + f(x_0)}{-x + x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{-\big(f(x) - f(x_0)\big)}{-(x - x_0)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= f'(x_0)
\end{aligned}$$

Conclusion : f' est paire paire.

(iii) Soit f une fonction T-périodique définie dérivable sur un intervalle I. Par définition, on a :
$\forall x \in I, \quad \forall n \in \mathbb{N} \;/\; x + nT \in I, \quad f(x + nT) = f(x)$.

$$f'(x_0 + nT) = \lim_{x\to x_0+nT} \frac{f(x) - f(x_0 + nT)}{x - (x_0 + nT)} \qquad \text{par définition du nombre dérivé}$$

$$\begin{aligned} f'(x_0+nT) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x+nT)-f(x_0+nT)}{x+nT-(x_0+nT)} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} && \text{par périodicité de } f \\ &= f'(x_0) \end{aligned}$$